3.2.

Hodge Theory on Kähler Manifolds

Def. 3.2.1 (X, g) : cpt, hermitian mfd.

hermitian product $(\cdot, \cdot) : \mathcal{A}^*_{\mathbb{C}}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^*_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\alpha, \beta) := \int_X g_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta) * 1$$

$g_{\mathbb{C}}$: g の hermitian 延長

Rmk.

- α と β の deg が異なれば，$g(\alpha, \beta) = 0$ より $(\alpha, \beta) = 0$.

Prop. 3.2.2 (X, g) : cpt, hermitian mfd.

以下の分解は $(\, ,\,)$ について直交分解である：

i) degree decomp. $\mathcal{A}^*_{\mathbb{C}}(X) = \bigoplus_k \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X)$

ii) bidegree decomp. $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(X)$

iii) Lefschetz decomp. $= \bigoplus_{i \geq 0} L^i P^{k-2i}_{\mathbb{C}}(X)$

prf. i) by def. (上の Rmk.)

ii) 各点で

Lemma 1.2.24 *Let $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$, Λ, and $*$ be as above. Then*

i) *The decomposition $\bigwedge^k V^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus \bigwedge^{p,q} V^*$ is orthogonal with respect to $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$.*

iii) 各点で

Proposition 1.2.30 *Let $(V, \langle\ ,\ \rangle, I)$ be an euclidian vector space of dimension $2n$ with a compatible almost complex structure and let L and Λ be the associated Lefschetz operators.*

i) *There exists a direct sum decomposition of the form:*

$$\bigwedge^k V^* = \bigoplus_{i \geq 0} L^i(P^{k-2i}). \tag{1.9}$$

This is the Lefschetz decomposition. *Moreover, (1.9) is orthogonal with respect to $\langle\ ,\ \rangle$.*

$\square$

Lem. 3.2.3 (X, g) : cpt, hermitian mfd.

$(\,,\,)$ について $\partial \overset{\text{adj.}}{\longleftrightarrow} \partial^*$

$\bar{\partial} \longleftrightarrow \bar{\partial}^*$

prf. $\alpha \in A^{p-1,q}(X)$, $\beta \in A^{p,q}(X)$ $\partial \underset{\text{adj.}}{\longleftrightarrow} \partial^*$ のみ示す。

$$(\partial\alpha, \beta) \overset{(\text{def of } (,))}{=} \int_X g_{\mathbb{C}}(\partial\alpha, \beta) * 1$$

$$\overset{(\text{def of } *)}{=} \int_X \partial\alpha \wedge * \bar{\beta}$$

$$\overset{(\text{微分})}{=} \underbrace{\int_X \partial(\underbrace{\alpha \wedge * \bar{\beta}}_{\deg = (n-1, n)})}_{} - (-1)^{p+q-1} \underbrace{\int_X \alpha \wedge \partial(* \bar{\beta})}_{*\text{は}\,\|\,\text{up to sgn で自己対合.}}$$

(def of ∂) $\|$

$$\underbrace{d(\alpha \wedge * \bar{\beta})}_{}$$

X: cpt より $\|$ Stokes

0

$$(\text{sgn}) \int_X \alpha \wedge ** \partial(* \bar{\beta})$$

$\|$ (def of $*$)

$$(\text{sgn}) \int_X g_{\mathbb{C}}(\alpha, \overline{* \partial * \bar{\beta}}) * 1$$

$*$は実 $\|$ $\overline{\partial\alpha} = \bar{\partial}\bar{\alpha}$

$$(\text{sgn}) \int_X g_{\mathbb{C}}(\alpha, * \bar{\partial} * \beta) * 1$$

$\|$ (def of $\bar{\partial}$)

$$(\text{sgn}) \int_X g_{\mathbb{C}}(\alpha, -\partial^* \beta) * 1$$

$\|$ (def of $(,)$)

$$(\text{sgn}) \ (\alpha, \partial^* \beta)$$

符号は計算すると 1 になる。 $\square$

Def. A.0.11 (M,g) : cpt, ori. Riemannian mfd.

$$\mathcal{H}^k(M,g) := \{\alpha \in \mathcal{A}^k(M) \mid \Delta\alpha = 0\}$$

$\underbrace{}_{\text{省きうる}}$: 調和 k-形式 の空間 $\subseteq \mathcal{A}^k(M)$

Rmk. $\mathcal{H}^{p,q}(X,g) := \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(X) \mid \Delta\alpha = 0\}$

: 調和 (p,q)-形式 の空間

と定義することはできるが、一般には

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) & = & \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(X) \\ \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ \mathcal{H}^k(X)_{\mathbb{C}} & \supsetneq & \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X) \end{array}$$

☆ : 直和分解を引き継がない。

つまり、α が調和形式でも各 bidegree 成分が調和形式とは限らない。

$\rightsquigarrow$ "$\bar{\partial}$ (∂) に関する調和形式" を考えると直和分解 $☆_{\bar{\partial}}$ $☆_{\partial}$ を持つ。

さらに Kähler なら Kähler idty. より ☆ が等号で成立する。

Def. 3.2.4 (X,g) : cpt, hermitian mfd.

$$\mathcal{H}^k_{\bar{\partial}}(X,g) := \{\alpha \in \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) \mid \Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0\}$$

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(X,g) := \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(X) \mid \Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0\}$$

: $\bar{\partial}$-調和形式 の空間

$$\mathcal{H}^k_{\partial}(X,g) := \{\alpha \in \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) \mid \Delta_{\partial}\alpha = 0\}$$

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(X,g) := \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(X) \mid \Delta_{\partial}\alpha = 0\}$$

: ∂-調和形式 の空間

Lem. 3.2.5 (X,g) : cpt, hermitian mfd.

$$\Delta_{\bar\partial}\alpha = 0 \iff \bar\partial\alpha = \bar\partial^*\alpha = 0$$
$$\Delta_{\partial}\alpha = 0 \iff \partial\alpha = \partial^*\alpha = 0$$

prf. $(\Delta_{\bar\partial}\alpha, \alpha)$) $\Delta_{\bar\partial}$ と $(,)$ の def.

$= \int_X g_{\mathbb{C}}(\bar\partial^*\bar\partial\alpha + \bar\partial\bar\partial^*\alpha, \alpha) * 1$) 双線形

$= \int_X g_{\mathbb{C}}(\bar\partial^*\bar\partial\alpha, \alpha) * 1 + \int_X g_{\mathbb{C}}(\bar\partial\bar\partial^*\alpha, \alpha) * 1$) 随伴

$= \int_X g_{\mathbb{C}}(\bar\partial\alpha, \bar\partial\alpha) * 1 + \int_X g_{\mathbb{C}}(\bar\partial^*\alpha, \bar\partial^*\alpha) * 1 = \|\bar\partial^*\alpha\|^2 + \|\bar\partial\alpha\|^2$

□

Prop. 3.2.6 (X,g) : hermitian mfd.

i) $\mathcal{H}^k_{\bar\partial}(X,g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g)$ ☆$_{\bar\partial}$

$\mathcal{H}^k_{\partial}(X,g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(X,g)$ ☆$_{\partial}$

ii) (X,g) が Kähler なら、3式は一致する.

$\mathcal{H}^k(X,g)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X,g)$ ☆

prf. i) : $\bar\partial$-調和形式 $\alpha = \sum \underbrace{\alpha^{p,q}}_{\in A^{p,q}}$ に対し、

$0 = \Delta_{\bar\partial}\alpha = \sum \underbrace{\Delta_{\bar\partial}\alpha^{p,q}}_{\in A^{p,q}}$ より 各々 $\Delta_{\bar\partial}\alpha^{p,q} = 0$.

ii) Kähler なら $\frac{1}{2}\Delta = \Delta_{\bar\partial} = \Delta_{\partial}$ (Kähler identity) □

Rmk. 3.2.7.

Hodge $*$ と Δ が可換.

(X, g)

i) $* : \mathcal{H}^k(X,g)_{\mathbb{C}} \cong \mathcal{H}^{2n-k}(X,g)_{\mathbb{C}}$ Riemannian mfd.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{H}^{p,q}(X,g) \cong \mathcal{H}^{n-q,n-p}(X,g) \\ A^{p,q}(X) \cong A^{n-q,n-p}(X) \\ \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g) \cong \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\partial}(X,g) \end{array}\right\} \text{hermitian mfd.}$$

Kähler ならこれは自己同型.

共役 : $\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g) \cong \mathcal{H}^{q,p}_{\partial}(X,g)$

ii) (X,g) : cpt, conn. hermitian mfd.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g) \times \mathcal{H}^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(X,g) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \alpha \;,\; \beta & \longmapsto & \int_X \alpha\wedge\beta \end{array}$$ は非退化.

$\because$ $\alpha \;,\; *\bar\alpha \longmapsto \|\alpha\|^2$.

$\rightsquigarrow \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g) \underset{SD}{\cong} \mathcal{H}^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(X,g)^\vee$: 調和形式の Serre duality.

iii) (X,g) : Kähler mfd, dim $= n$.

$L^{n-k} : \mathcal{H}^{p,k-p}(X,g) \cong \mathcal{H}^{n+p-k,n-p}(X,g)$

$\because$ Kähler identity より L, Λ は Δ と交換するから harmonic 上にも全単射を誘導する.

Hard Lefschetz $\xrightarrow{\mathcal{D}\text{-module}}$ 柏原予想

Thm. 3.2.8 (Hodge 分解) (X,g): cpt, hermitian mfd.

$$\mathcal{A}^{p,q}(X) \cong \partial\mathcal{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(X,g) \oplus \partial^*\mathcal{A}^{p+1,q}(X)$$
$$\cong \bar\partial\mathcal{A}^{p,q-1}(X) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g) \oplus \bar\partial^*\mathcal{A}^{p,q+1}(X)$$

という2つの自然な直交分解が存在する。

第2因子は有限次元であり、Kähler なら一致する。

Cor. 3.2.9 (X,g): cpt, hermitian mfd.

$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g) \longrightarrow H^{p,q}(X)$: 自然な射影は同型。

α は $\bar\partial$-閉なので $[\alpha]$: Dolbeault コホモロジー類を定める。 (Lem.3.2.5)

prf. $\alpha \in \mathrm{Ker}\left(\bar\partial : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X)\right)$ を取り、Hodge 分解で

$\alpha = \bar\partial\beta + \gamma + \bar\partial^*\delta$ とかく。

$$0 = \bar\partial\alpha = \underbrace{\bar\partial^2\beta}_{=0\ (\because\ \bar\partial^2=0)} + \underbrace{\bar\partial\gamma}_{=0\ (\because\ \text{Lem3.2.5})} + \bar\partial\bar\partial^*\delta$$ だが、

$0 = (\bar\partial\bar\partial^*\delta, \delta) = \|\bar\partial^*\delta\|^2$ より

$\bar\partial^*\delta = 0$.

$\rightsquigarrow \alpha = \bar\partial\beta + \gamma$. つまり

$$\mathrm{Ker}\left(\bar\partial : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X)\right) = \bar\partial\mathcal{A}^{p,q-1}(X) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g).$$

$$H^{p,q}(X) = \mathrm{Ker}(\bar\partial)/\mathrm{Im}(\bar\partial) = \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X,g). \qquad \square$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{k} \arrow[rrrr, leftrightarrow, "\text{Hodge-}*", "\sim\ \text{鏡映}"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & & & \mathcal{H}^{2n-k} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\cdots \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{p+q} \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{p+q+1} \to \cdots \arrow[r] & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{n} \to \cdots \arrow[rr] & & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n-(p+q)} \to \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}^{p,q+1} \arrow[dl, "\bar\partial^*"'] & \\
 & \mathcal{A}^{p,q} \arrow[ur, shift left, "\bar\partial"] \arrow[dr, shift left, "\partial"] \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Hodge-}*", "\sim\ \text{鏡映}"'] \arrow[d, dotted, "\text{コホモロジー}"'] & & \mathcal{A}^{n-q,n-p} \\
\mathcal{A}^{p,q-1} \arrow[ur, "\bar\partial"] & H^{p,q} & \mathcal{A}^{p+1,q} \arrow[ul, shift left, "\partial^*"] &
\end{tikzcd}
$$

$\bar\partial$-Hodge 分解

$$
0 \xleftarrow{\bar\partial^*} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Im}\bar\partial^* \\ \oplus \\ \mathcal{H}_{\bar\partial}^{p+1,q} \end{array} \right. \qquad \left(\mathcal{H}_{\bar\partial}^{n-p,n-q}\right)^{\vee}
$$
$$
\oplus
$$
$$
0 \xleftarrow{\bar\partial^*} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Im}\bar\partial^* \\ \oplus \\ \mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q} \end{array} \right. \underset{\bar\partial}{\overset{\bar\partial^*}{\rightleftarrows}} \operatorname{Im}\bar\partial
$$

$$
\mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q} \xrightarrow[\sim]{\text{SD}} \left(\mathcal{H}_{\bar\partial}^{n-p,n-q}\right)^{\vee}
$$
$$
\mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q} \underset{\sim}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} \mathcal{H}_{\bar\partial}^{n-q,n-p}
$$

$$
\left. \begin{array}{c} \mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q} \\ \oplus \\ \operatorname{Im}\bar\partial \end{array} \right\} \xrightarrow{\bar\partial} 0
$$

$$
\begin{array}{c} \operatorname{Im}\bar\partial^* \\ \oplus \end{array} \underset{\bar\partial}{\overset{\bar\partial^*}{\rightleftarrows}} \operatorname{Im}\bar\partial
$$
$$
\left. \begin{array}{c} \mathcal{H}_{\bar\partial}^{p+1,q} \\ \oplus \\ \operatorname{Im}\bar\partial \end{array} \right\} \xrightarrow{\bar\partial} 0
$$

$$
\mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q} \underset{\sim}{\overset{\text{共役}}{\longleftrightarrow}} \mathcal{H}_{\bar\partial}^{q,p} \qquad \mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q}
$$

↓ 以下 Kähler の場合

Cor. 3.2.10 ($\partial\bar\partial$-lemma) X : cpt, Kähler mfd.

α : d－閉(p,q)形式 について. TFAE

i) α : d－完全 i.e. $\exists\beta,\ \alpha = d\beta$

ii) α : ∂－完全 $\partial\beta$

iii) α : $\bar\partial$－完全 $\bar\partial\beta$

iv) α : $\partial\bar\partial$－完全 $\partial\bar\partial\beta$

prf. さらにもうひとつ同値な条件を加える.

v) α は $\mathcal{H}^{p,q}(X,g)$ に直交する ($\forall$ Kähler 計量 g on X)

∘ Hodge 分解より $\mathrm{Im}\,\partial$, $\mathrm{Im}\,\bar\partial$ は $\mathcal{H}^{p,q}$ に直交する.
$d=\partial+\bar\partial$ より $\mathrm{Im}\,d$ も 直交する. $\rightsquigarrow$ i)〜iv) $\Downarrow$ v)

∘ $\partial\bar\partial = d\bar\partial = -\bar\partial\partial$ より iv) $\Rightarrow$ i)〜iii).

$\overset{\shortparallel}{=}(d-\bar\partial)\bar\partial \overset{\shortparallel}{=} d(d-\partial) = -d\partial = -\bar\partial\partial$

ets : v) $\Rightarrow$ iv)

∘ α : d－閉(p,q)形式 が v) $\mathcal{H}^{p,q}$ に直交する とする.
$\longrightarrow$ ∂－閉, $\bar\partial$－閉.

∘ ∂についての Hodge 分解 $\mathrm{Ker}(\partial) = \partial A^{p,q-1}(X) \oplus \mathcal{H}^{p,q}(X,g)$
より $\alpha = \partial\gamma$ とかける.

∘ $\bar\partial$についての Hodge 分解より $\gamma = \bar\partial\beta + \beta'' + \bar\partial^*\beta'$ (β'': 調和) とかける.

$$\alpha = \partial\bar\partial\beta + \partial\bar\partial^*\beta'$$

$$0 = \bar\partial\alpha = \bar\partial\partial\bar\partial\beta + \bar\partial\partial\bar\partial^*\beta'$$

cf. 3.1.12 iii) $\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial = 0$

$\bar\partial\partial = \partial\bar\partial$ より $\bar\partial\partial\bar\partial\beta = 0$, $\bar\partial\partial\bar\partial^*\beta' = -\bar\partial\bar\partial^*\partial\beta'$.

$$0 = (\bar\partial\bar\partial^*\partial\beta', \partial\beta') = \|\bar\partial^*\partial\beta'\|^2$$ より $0 = \bar\partial^*\partial\beta' = -\partial\bar\partial^*\beta'$. □

Cor. 3.2.12 (X,g) : cpt, Kähler mfd.

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$ という分解があり、これはKähler構造によらない

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$ で、Serre duality より

$$H^{p,q}(X) = H^{n-p,n-q}(X)^\vee.$$

prf. Kähler構造によらないこと以外は $H^k(\mathbb{C}) = \mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}$ から全て従う.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^k(X,g) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{H}^{p,q}(X,g) \ni \alpha \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr] & & \\
H^k(X,\mathbb{C}) & {[\alpha] = [\alpha'] \in H^{p,q}(X)} & \mathrm{Ker}\,\bar\partial \arrow[l, two heads] & \mathrm{Im}\,\bar\partial \arrow[l, hook'] \\
 & & \alpha' = \alpha + \bar\partial\gamma \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & \\
\mathcal{H}^k(X,g') \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uu, "\wr"] & \mathcal{H}^{p,q}(X,g') \ni \alpha' \arrow[uu, "\wr"'] \arrow[uur, bend right] \arrow[ur, leftrightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

外微分に関するHodge分解 $(\otimes\mathbb{C})$ を考える.

Theorem A.0.16 (Hodge decomposition) *Let (M,g) be a compact oriented Riemannian manifold. Then, with respect to the scalar product $(\ ,\ )$, there exists an orthogonal sum decomposition with respect to the scalar product $(\ ,\ )$:*

$$\mathcal{A}^k(M) = d(\mathcal{A}^{k-1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M,g) \oplus d^*(\mathcal{A}^{k+1}(M)).$$

β : 調和なら

- $\bar\partial\gamma$ は $\mathcal{H}^k(X,g)$ に直交する. $\because\ (\bar\partial\gamma, \beta) = (\gamma, \bar\partial^*\beta) = 0$
- $\bar\partial\gamma$ は $d^*(\mathcal{A}^{k+1}(X))$ に直交する. $\because\ d\bar\partial\gamma = d(\alpha' - \alpha) = 0$ より (Lem. A.0.12)

$$(\bar\partial\gamma, d^*\beta) = (d\bar\partial\gamma, \beta) = 0.$$

$\leadsto \bar\partial\gamma \in d(\mathcal{A}^{k-1}(X))$ なので $H^k(X,\mathbb{C})$ で一致. $\square$

Def. 3.2.14 X : cpt, Kähler mfd.

- X の Kähler 構造 ω が定めるコホモロジー類 $[\omega] \in H^{1,1}(X)$ を X の Kähler類とよぶ.
- $\mathcal{K}_X = \{X \text{ の Kähler類}\} \subseteq H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ を X の Kähler錐とよぶ.

$\mathcal{K}_X$ は実際に凸錐をなす (Ex. 3.2.12)